

CONCURSO PÚBLICO

GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL PROCURADORIA-GERAL DO DISTRITO FEDERAL

CARGO 8: ANALISTA JURÍDICO – ESPECIALIDADE: ESTATÍSTICA

PROVA DISCURSIVA

Aplicação: 29/8/2021

PADRÃO DE RESPOSTA DEFINITIVO

A distribuição uniforme contínua é uma distribuição simétrica de probabilidade que descreve um experimento aleatório cujos resultados se distribuem aleatoriamente sobre um intervalo. Na situação em questão, o limite inferior do intervalo é nulo, mas o superior (L) é desconhecido. Simbolicamente, essa distribuição pode ser denotada como $X \sim U[0, L]$. A função de densidade de probabilidade de X é dada por $f(x) = 1/L$, se $0 \leq x \leq L$; e $f(x) = 0$, se $x < 0$ ou $x > L$, e seu desvio padrão é $\sigma = L/\sqrt{12}$.

Se $X_1, \dots, X_n$ representa uma amostra aleatória simples retirada de $X \sim U[0, L]$, a função de verossimilhança pode ser escrita como

$$\varphi(L; X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{L^n},$$

em que $0 \leq X_i \leq L$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, ou seja, $0 \leq X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\} \leq L$. Como a função $\varphi(L; X_1, \dots, X_n)$ decresce à medida que L aumenta, e como L não pode ser inferior ao valor máximo observado na amostra, $X_{(n)}$, conclui-se que o EMV de L é $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

Com respeito ao primeiro aspecto, como $\sigma = L/\sqrt{12}$, pelo princípio da invariância, seu EMV é $\hat{\sigma} = X_{(n)}/\sqrt{12}$.

No que se refere ao segundo aspecto, a distribuição amostral exata do EMV de L é

$$F_n(x) = P(X_{(n)} \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = \left(\frac{x}{L}\right)^n,$$

para $x \in [0, L]$; $F_n(x) = 1$, se $x > L$; e $F_n(x) = 0$, se $x < 0$. Logo, a função de densidade de $X_{(n)}$, para $x \in [0, L]$, é

$$f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{L^n}.$$

Observa-se que o EMV de L é viciado, pois $E[X_{(n)}] = \frac{n}{L^n} \int_0^L x x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1} L$. Como $E[X_{(n)}^2] = \frac{n}{L^n} \int_0^L x^2 x^{n-1} dx = \frac{n}{n+2} L^2$, a variância do EMV de L pode ser escrita como $\text{Var}[X_{(n)}] = \left[\frac{n}{(n+2)(n+1)^2} \right] L^2$.

Assim, finalmente, quanto ao terceiro aspecto, o erro quadrático médio do EMV de L é

$$\text{MSE}(X_{(n)}) = \text{Var}(X_{(n)}) + \left[L - \frac{n}{n+1} L \right]^2 = \left[\frac{2}{(n+2)(n+1)} \right] L^2.$$

QUESITOS

2.1

0 – Não abordou o tema.

1 – Abordou o tema sem justificar a resposta ou apresentou de forma equivocada o estimador de máxima verossimilhança (EMV) do parâmetro L .

2 – Abordou o tema parcialmente, limitando-se a apresentar corretamente o EMV do parâmetro L .

3 – Abordou o tema parcialmente, desenvolvendo corretamente o EMV do parâmetro L , mas apresentando de forma equivocada o EMV do desvio padrão da distribuição X .

4 – Apresentou, com as devidas justificativas, o EMV do desvio padrão da distribuição X .

2.2

0 – Não abordou o tema.

1 – Abordou o tema sem justificar a resposta ou apresentou de forma equivocada a distribuição amostral exata do estimador do parâmetro L ou apresentou uma distribuição amostral aproximada no lugar da distribuição exata.

2 – Apresentou corretamente, com as devidas justificativas, a distribuição amostral exata do EMV do parâmetro L .

2.3

0 – Não abordou o tema.

1 – Abordou o tema sem justificar a resposta.

2 – Abordou o tema parcialmente, limitando-se a apresentar corretamente a variância do EMV de L , sem levar em consideração o vício do estimador.

3 – Apresentou, com as devidas justificativas, a expressão do erro quadrático médio do EMV de L .